ISTITUTO INTERNAZIONALE STUDI AVANZATI DI
SCIENZE DELLA RAPPRESENTAZIONE DELLO SPAZIO
Geometria proiettiva, Geometria descrittiva, Rilevamento, Fotogrammetria

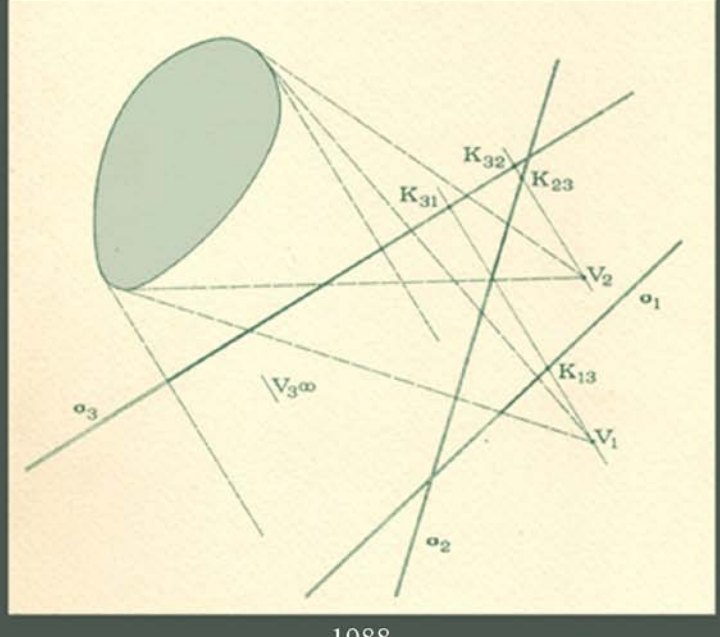
INTERNATIONAL INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES OF
SPACE REPRESENTATION SCIENCES
Projective geometry, Descriptive geometry, Survey, Photogrammetry

Palermo, Italia

Università degli Studi di Palermo

Giuseppe Maria Catalano

RESTITUZIONE GRAFICA DA UNA COPPIA DI FOTOGRAMMI COMUNQUE ORIENTATI



1988

Alla cara memoria dei miei nonni

Presentazione

In seguito alla pubblicazione del metodo relativo al rilevamento di un qualsiasi volume da due fotogrammi tra loro paralleli, Giuseppe M. Catalano ha ricevuto, assieme ai complimenti, una serie di stimoli per raggiungere un ulteriore grado di libertà.

In particolare Roberto de Rubertis segnalò l'utilità di pervenire al rilevamento dell'oggetto usufruendo di due fotogrammi comunque orientati.

Un ulteriore spunto per svincolare il metodo dalla preventiva conoscenza dell'orientamento reciproco fra i due fotogrammi fu fornito dal saggio su << Il ruolo di Guido Hauck nello sviluppo teorico della fotogrammetria d'architettura>> pubblicato da Riccardo Migliari nei numeri 1 e 2 dei Quaderni del Dipartimento di Rappresentazione e Rilievo dell'Università di Roma La Sapienza.

In tale saggio il Migliari evidenziava << la possibilità di ricavare una terza proiezione qualsivoglia dalla conoscenza di due immagini della figura considerata e, naturalmente, dei rispettivi nuclei>>.

Le incognite in tale procedimento risiedevano però nel ricavare dai due fotogrammi i nuclei, senza fare uso della proiezione reciproca dei due centri di proiezione sui due fotogrammi, e di pervenire alla restituzione senza usufruire della conoscenza della base, che era invece necessaria nelle applicazioni sperimentali di Baycow.

Inoltre, mentre questi dati erano sufficienti per la restituzione stereofotogrammetrica mediante ricostituzione del modello spaziale, per la restituzione grafica occorreva definire il piano di rappresentazione dell'oggetto.

Il metodo proposto da Giuseppe M. Catalano consente di sconoscere la base e di ricavare l'orientamento tra i due fotogrammi mediante l'introduzione della giacitura del piano di restituzione su cui proiettare ortogonalmente il volume.

La definizione di tale piano, che nel caso generale risulta comunque disposto rispetto al solido ed ai due fotogrammi, è molto semplice e viene affidata alla conoscenza di due segmenti incidenti (due aste o due fili tesi, ognuno dei quali diviso in due secondo rapporti noti) che possono essere di modesta dimensione compatibilmente con la profondità di campo richiesta dall'oggetto.

La semplicità dei mezzi occorrenti, anche quando il volume è inaccessibile, permette al metodo rapidità di esecuzione e massima generalità di applicazione.

Siamo perciò convinti che il lodevole studio presentato da Giuseppe M. Catalano rappresenti un notevole ed originale contributo anche nel campo della restituzione grafica di forme complesse in quanto, oltre ad eliminare la conoscenza preventiva della base e dell'orientamento tra i due fotogrammi, permette, se si vuole, di sganciare il piano di rappresentazione da ogni riferimento all'oggetto.

Vincenzo Capitano

Introduzione

Nel 1833 Guido Hauck pubblica "Construction der Perspective and Photogrammetrie" dimostrando, tra l'altro, l'esistenza di un legame proiettivo fra i due fasci di rette proiettanti punti corrispondenti in due immagini distinte di uno stesso corpo dai punti appartenenti ai due quadri ed alla congiungente i due centri di proiezione.

Da queste premesse, recentemente messe in luce dal prof. Riccardo Migliari in un interessante saggio sul ruolo di Guido Hauck nello sviluppo teorico della fotogrammetria d'architettura, ha preso l'avvìo questa ricerca, sulle orme, peraltro, dell'esperienza da me fatta in un precedente studio sul rilevamento per restituzione grafica da due fotogrammi paralleli.

In quel metodo occorreva conoscere soltanto la distanza tra le due postazioni di ripresa, al fine di determinare la dimensione dell'oggetto restituito, mentre l'orientamento dei fotogrammi e la giacitura prefissata su cui ottenere la proiezione ortogonale erano ricavabili dalle stesse immagini fotografiche.

Avvalendosi adesso di due fotogrammi comunque orientati, si è pensato di riferire questi ultimi ad uno stesso piano individuabile nelle due immagini, piano che può assumersi parallelo alla giacitura assegnata: gli stessi elementi esterni, cioè due segmenti

appartenenti o no al manufatto da rilevare, necessari all'individuazione della giacitura sono, allora, sufficienti per instaurare due proiettività tra fasci di rette (relazioni di Hauck) e mettere in relazione ciascuna immagine fotografica con l'immagine restituita, in modo da ricostruire l'orientamento, pur consentendo una grande libertà operativa all'atto della restituzione, fornendo insieme la proiezione ortogonale richiesta.

METODO

Principi teorici

Principi teorici

Siano dati due piani π_1 e π_2 comunque disposti nello spazio; siano inoltre fissati liberamente due centri di proiezione V_1 e V_2 relativi ai due piani (Fig. 1).

Proiettiamo un generico corpo dello spazio, ad esempio un triangolo A B C, dai due centri sui due piani, ottenendo le proiezioni $A_1 B_1 C_1$ ed $A_2 B_2 C_2$.

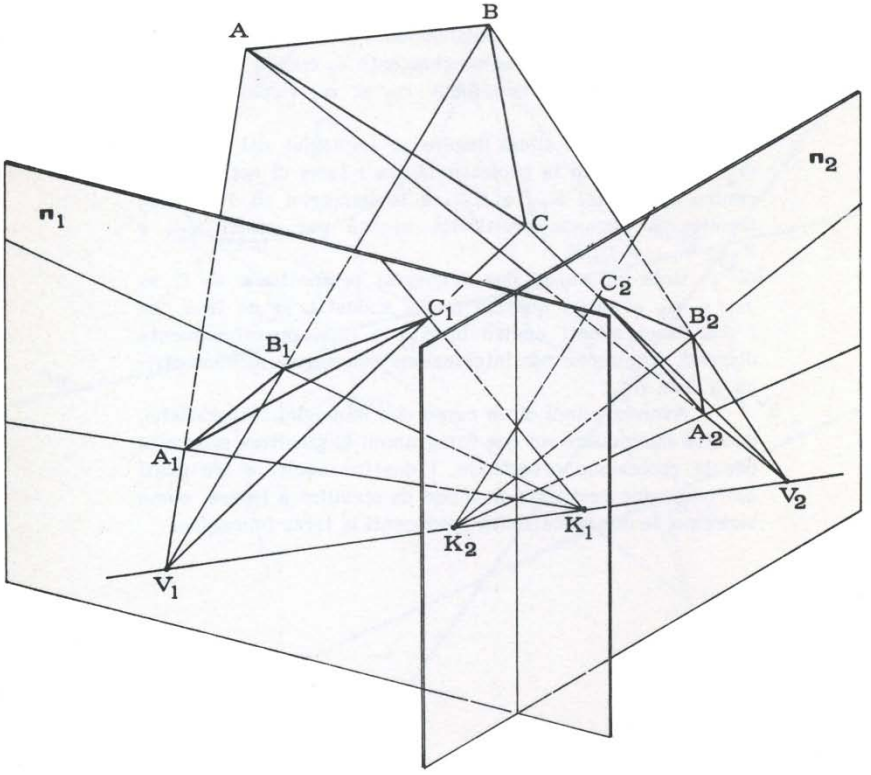
La retta congiungente V_1 e V_2 interseca i due piani nei punti K_1 e K_2 e le rette proiettanti da questi ultimi le immagini di uno stesso punto si incontrano sulla retta d'intersezione dei due piani (Fig. 1).

Guido Hauck (1883) mostra così che i due fasci di rette suddetti, aventi centro nei punti K_1 e K_2, che definisce "nuclei", sono prospettivi e comunque, per effetto di un qualsiasi spostamento di essi nello spazio, proiettivi.

Consideriamo adesso tre piani π_1 π_2 e π_3 , comunque giacenti nello spazio e tre centri ad essi relativi, due, V_1 e V_2 , al finito ed uno, V_3 all'infinito (In figura 2, per maggiore chiarezza, supponiamo che essi siano perpendicolari al foglio).

Proiettiamo il generico corpo C comunque disposto nello spazio, dai tre centri sui tre piani.

La congiungente V_1 con V_{3oo} , la parallela, cioè, per V_1 alla direzione di V_{3oo} , fornisce per intersezione sui due



F.1

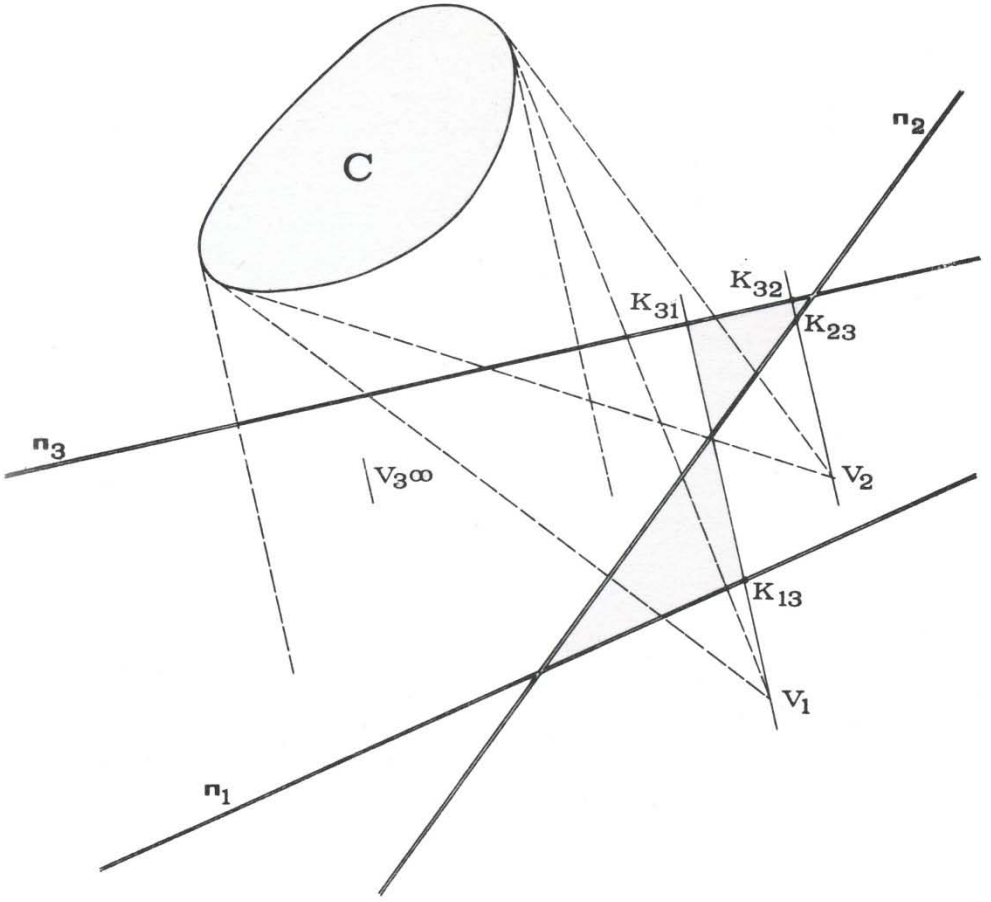
piani π_1 e π_3 rispettivamente i nuclei K_{13} e K_{31}.

Allo stesso modo la congiungente V_2 con V_3 , fornisce per intersezione sui due piani π_2 e π_3 rispettivamente i nuclei K_{23} e K_{32} .

E' possibile allora legare le immagini del corpo su π_1 e π_3 tramite la proiettività tra i fasci di rette aventi centro nei nuclei K_{13} e K_{31}, e le immagini su π_2 e π_3 tramite la seconda proittività avente per centri K_{23} e K_{32} .

Note allora le due immagini prospettiche di C su π_1 e π_2 e noti i quattro nuclei suddetti, se ne trae che i due fasci aventi centro in K_{31} e $K_{32,}$ opportunamente disposti, forniscono per intersezione l'immagine assonometrica di C su π_3 .

Avendo quindi di un corpo due immagini fotografiche, occorre individuare sui due fotogrammi la giacitura prescelta per la proiezione ortogonale, i quattro nuclei e tre punti dell'immagine restituita in modo da stabilire e legare, come vedremo, le due proiettività producenti la terza immagine.



F.2

Principi applicativi

Principi applicativi

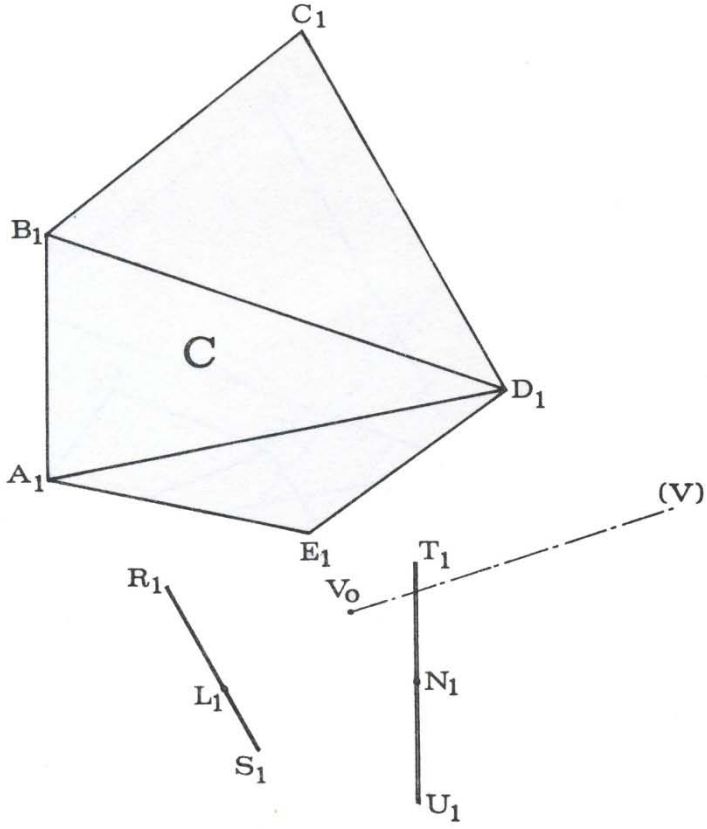
Siano A_1, B_1 ...E_1 ed A_2, B_2, ...E_2 le immagini del generico corpo C da rilevare su due fotogrammi ottenuti da postazioni generiche (Fig. 3 e 4).

Si considerino due generici segmenti RS e TU, definiti da elementi esterni o appartenenti a C, e individuanti un piano σ avente la giacitura su cui si desidera ottenere la proiezione ortogonale.

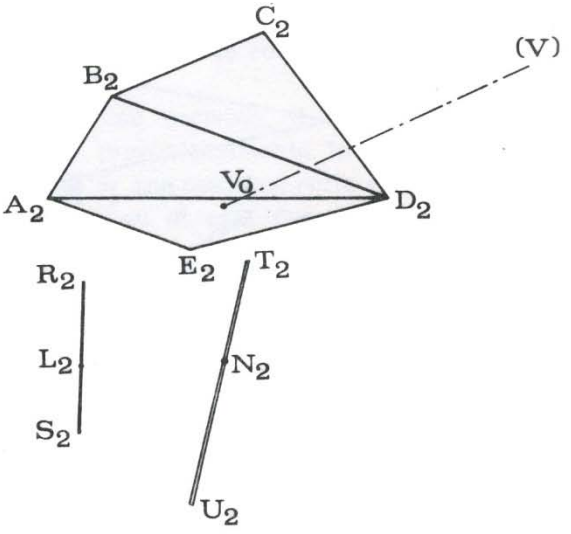
Supponiamo che ciascuno di essi sia diviso in due parti secondo rapporti noti: tale circostanza permette di individuare allora i punti di fuga delle rette cui i segmenti appartengono.

Prendiamo in esame, ad esempio, il segmento R_1 S_1 sulla retta r' suddiviso prospetticamente in R_1 L_1 ed L_1 S_1 (Fig. 5); tracciamo per S_1 una qualsiasi retta e, fissando S_1 come traccia, riportiamo su di essa due segmenti RL ed LS_1 secondo il rapporto reale noto. I segmenti R_1 S_1 ed R S_1 individuano un piano, la cui traccia deve contenere R S_1: pertanto la retta $f'\varpi$, parallela alla traccia suddetta e passante per F'd, intersezione di RR_1 ed LL_1, interseca la r' nel punto di fuga F 'r richiesto.

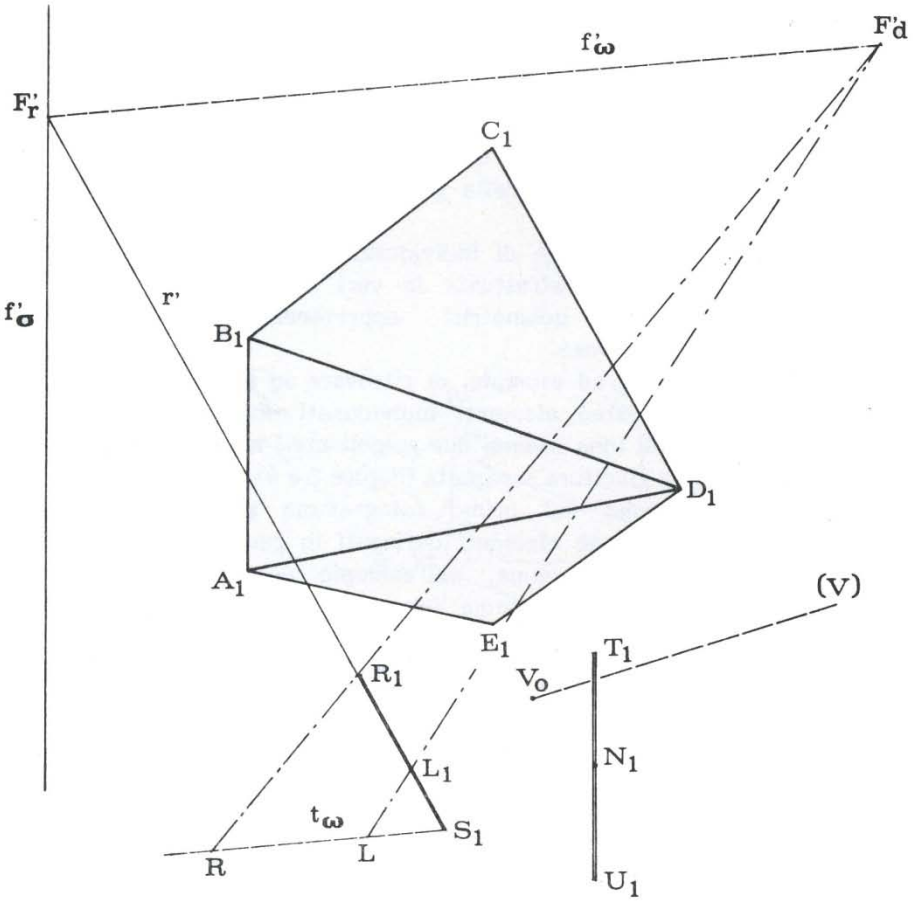
Il segmento T_1 V_1, è , in particolare, suddiviso prospetticamente secondo il rapporto reale: se ne deduce che esso è parallelo alla fuga di σ .



F.3



F.4



F.5

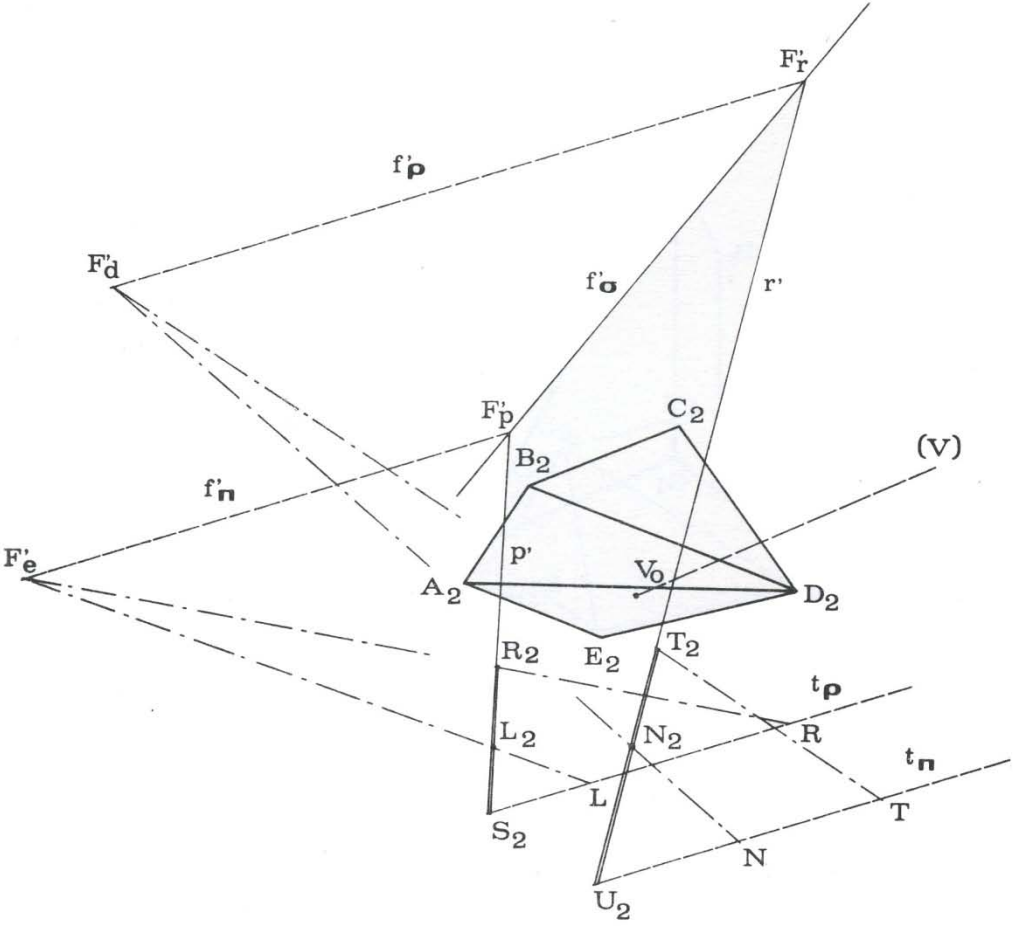
Noti, dunque, i punti di fuga, propri o impropri delle rette contenenti i due segmenti, risulta definita sui due fotogrammi la retta di fuga f 'σ del piano da questi individuato e cioè la prospettiva della giacitura prescelta (Figure 5 e 6).

Questa prima fase di individuazione della giacitura può essere, tuttavia, effettuata in vari modi, ricorrendo sempre ad elementi geometrici appartenenti o esterni al manufatto da rilevare.

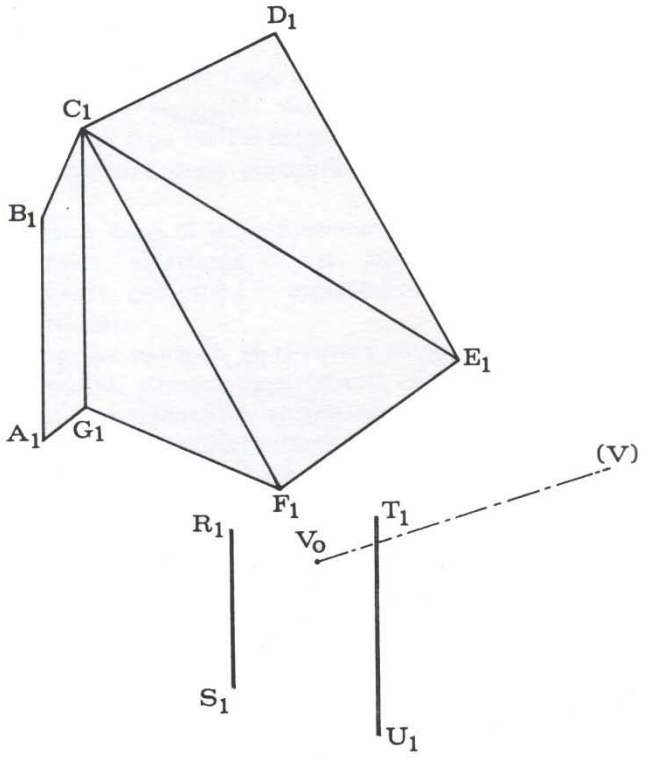
Supponiamo, ad esempio, di ritrovare su quest'ultimo, o su edifici prossimi, elementi individuanti due segmenti uguali e paralleli (due lesene, due spigoli etc.) appartenenti ovviamente alla giacitura assegnata (Figure 7 e 8).

Consideriamo nel primo fotogramma gli estremi R_1 S_1 T_1 U_1 dei due elementi definenti in generale nello spazio un parallelogramma, nell'esempio un rettangolo: i lati di tale parallelogramma fugano in F'_1 al finito ed in F'_2oo all'infinito (essendo due lati casualmente paralleli al quadro), sicché è subito individuata nella retta f 'σ , congiungente questi ultimi, la prospettiva della giacitura prescelta (Fig. 9).

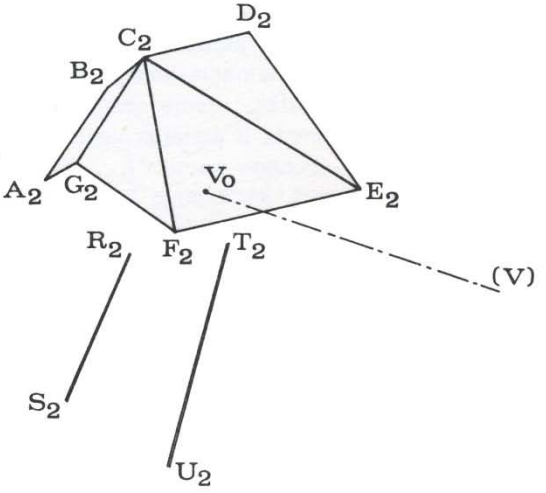
Nel secondo fotogramma, invece, non avendo il rettangolo alcun lato parallelo al quadro, i due punti di fuga risultano entrambi al finito (Fig. 10).



F.6



F.7



F.8

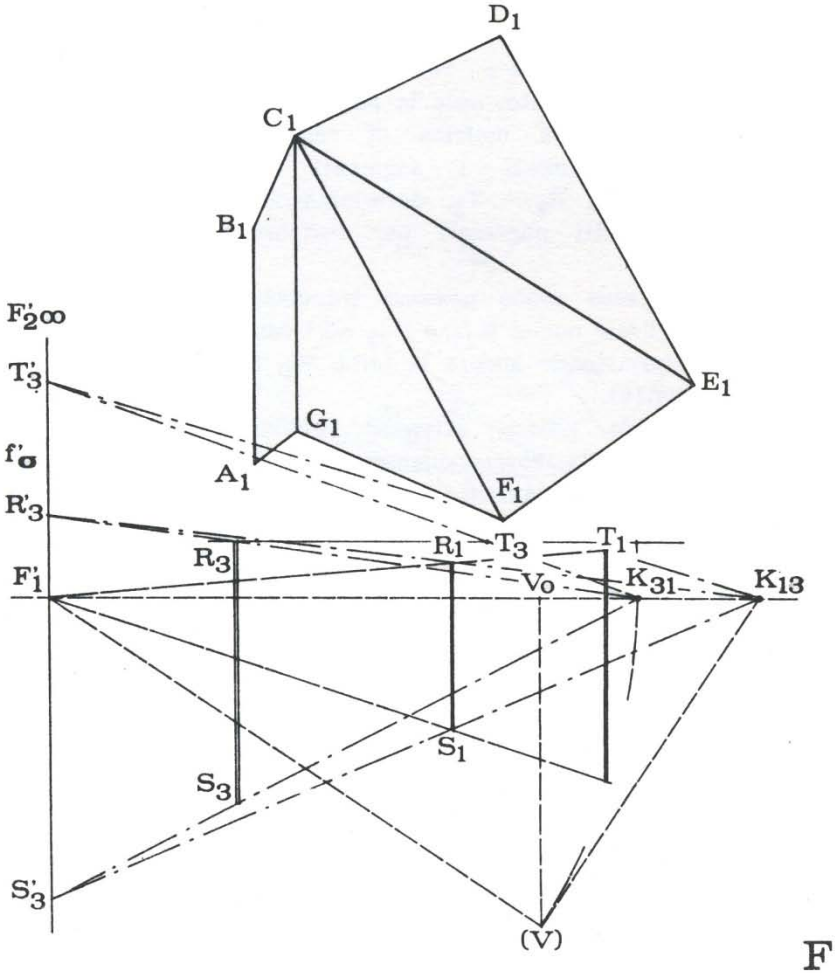
Ottenuta, comunque sia, la prospettiva f 'σ della giacitura sui due fotogrammi, occorre individuare velocemente i quattro nuclei necessari all'esecuzione del metodo.

Consideriamo allora che le diagonali di ciascun fotogramma forniscono, come è noto, per intersezione, V_o, punto di fuga delle ortogonali al quadro, mentre l'angolo di campo orizzontale (o verticale) determina la distanza tra V_o ed il centro di proiezione V ribaltato in (V) sul quadro (Figure 7 e 8).

Torniamo quindi al primo fotogramma di quest'ultimo esempio (Fig. 9): il punto di fuga delle ortogonali a tale giacitura, fornirà immediatamente il nucleo K_{13}.

Se poi fissiamo come quadro su cui ottenere la terza proiezione richiesta il piano proiettante la giacitura prescelta, allora il secondo nucleo K_{31} sarà subito fornito dalla posizione assunta da V dopo il ribaltamento di tale quadro sul piano del fotogramma (Fig. 9).

Proiettiamo, poi, tre estremi dei due segmenti dall'infinito ortogonalmente al piano proiettante suddetto, proiettiamo cioè R_1, S_1, T_1 da K_{13} su f'σ o in R'_3, S'_3 T'_3. Per tracciare i punti R_3, S_3, T_3 ottenuti dal ribaltamento del piano sul quadro del fotogramma, consideriamo che essi dovranno appartenere alle proiettanti R'_3, S'_3, T'_3 da K_{31}



F.9

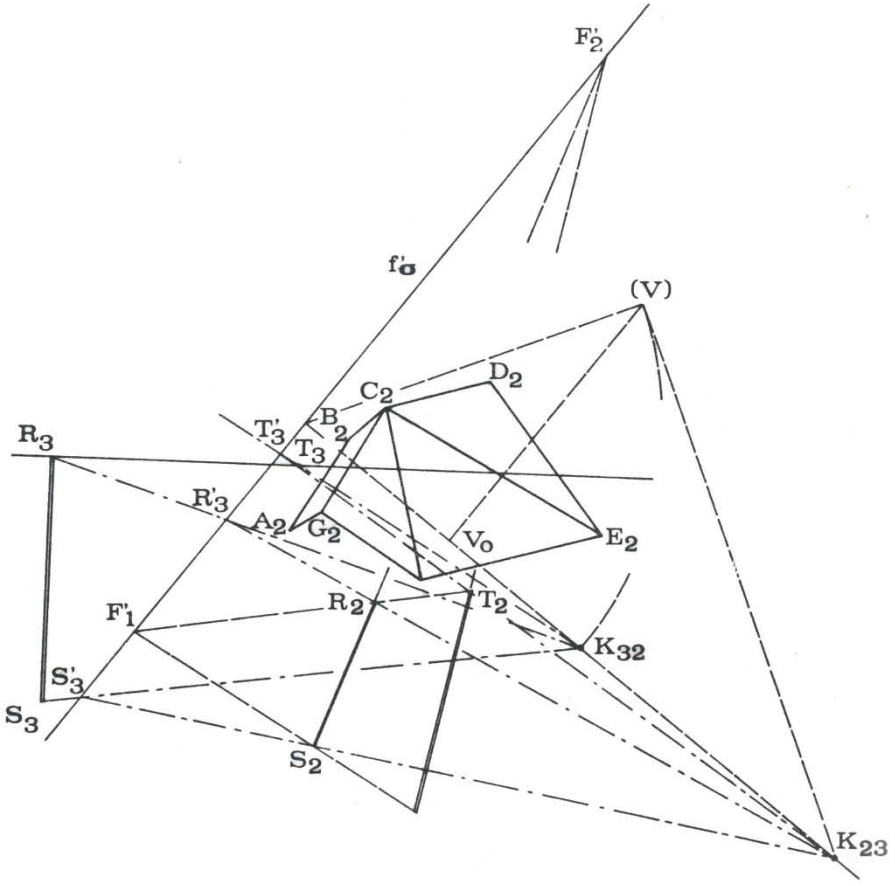
(V ribaltato) ed, insieme a rette aventi la direzione K_{31} F'_2 e K_{31} F'_1 : pertanto, nota la lunghezza degli elementi e stabilita la scala metrica di restituzione, restano immediatamente fissati i segmenti R_3-S_3 e, conseguentemente, R_3-T_3, determinando cosi la terna di punti restituiti necessari per instaurare il legame proiettivo.

Allo stesso modo possono tracciarsi sul secondo fotogramma i due nuclei K_{23} e K_{32} ed i relativi fasci prospettivi, determinando ancora la terna R_3, S_3, T_3 di punti restituiti (Fig. 10).

Potremmo adesso ottenere rapidamente l'intera immagine restituita sovrapponendo le terne R_3, S_3, T_3 ottenute sui due fotogrammi: le due prospettività fornirebbero, per ciascuna coppia di immagini di uno stesso punto sui due fotogrammi, una coppia di rette, la prima appartenente al fascio di centro $K_{31,}$ la seconda appartenente al fascio di centro K_{32}, determinanti per intersezione l'immagine restituita del punto stesso.

Tuttavia ciò implica spesso la sovrapposizione dei due fotogrammi e dell'immagine restituita.

Riferendosi nuovamente al primo fotogramma (Fig. 11), possiamo allora spostare liberamente il fascio avente centro nel nucleo K_{31} insieme alla terna R_3, S_3, T_3 ad esso appartenente



F.10

(servendosi anzi delle rette R_3-S_3 e R_3-T_3 come assi di un sistema di riferimento cui riferire il nucleo) e ricavare il centro di collineazione W_1 e gli assi necessari per instaurare il legame proiettivo con il fascio di rette di centro K_{13}, cui appartengono R_1, S_1, T_1 (nota 2).

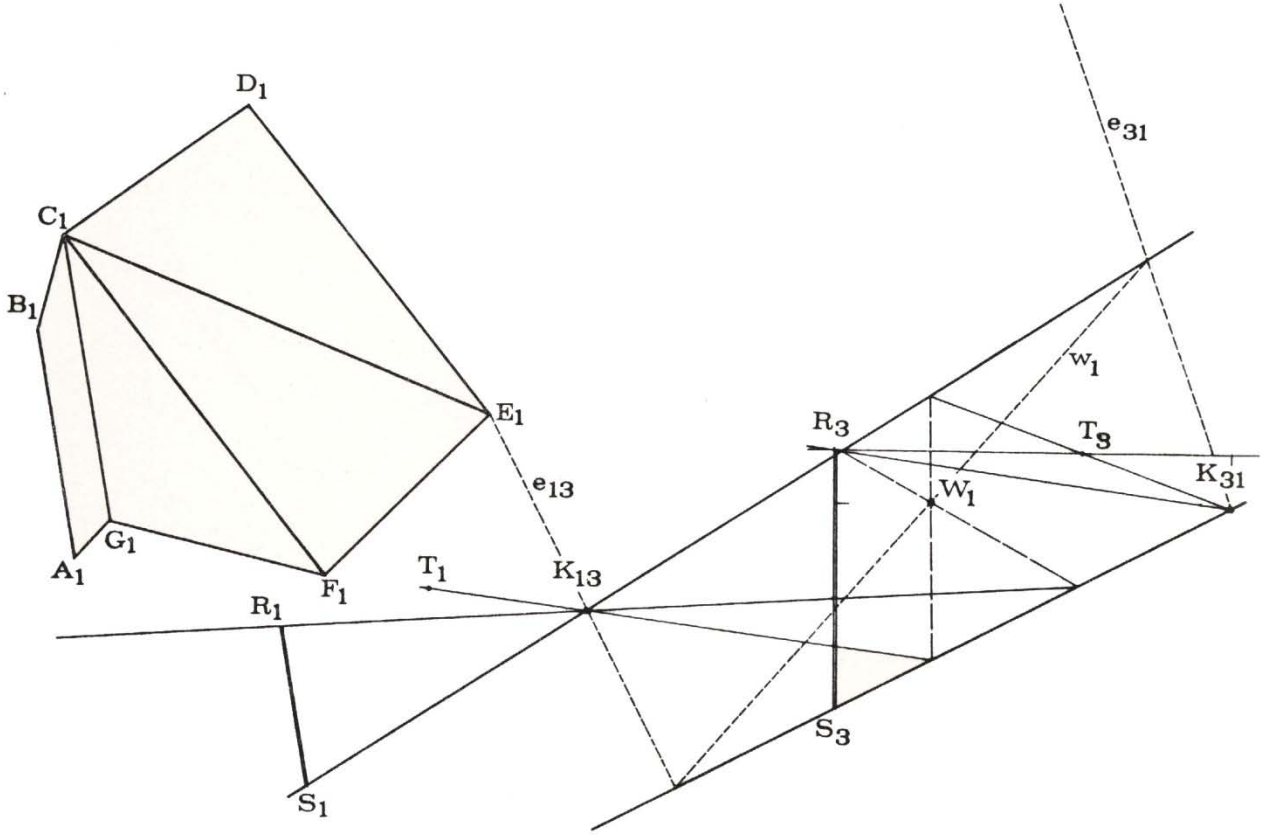
Analoga operazione può effettuarsi per il secondo fotogramma, ottenendo il centro di collineazione W_2 e i relativi assi(Fig. 12).

Sovrapponiamo, quindi, (Fig. 13) ancora una volta, le due terne R_3, S_3, T_3, appartenenti ai fasci di centro K_{31} e K_{32}: 1'immagine E_3 del generico punto E sarà fornita come intersezione della retta e_{31}, corrispondente alla e_{13} nella proiettività relativa al primo fotogramma, con la retta e_{32}, corrispondente alla e_{23} nella proiettività relativa al secondo fotogramma.

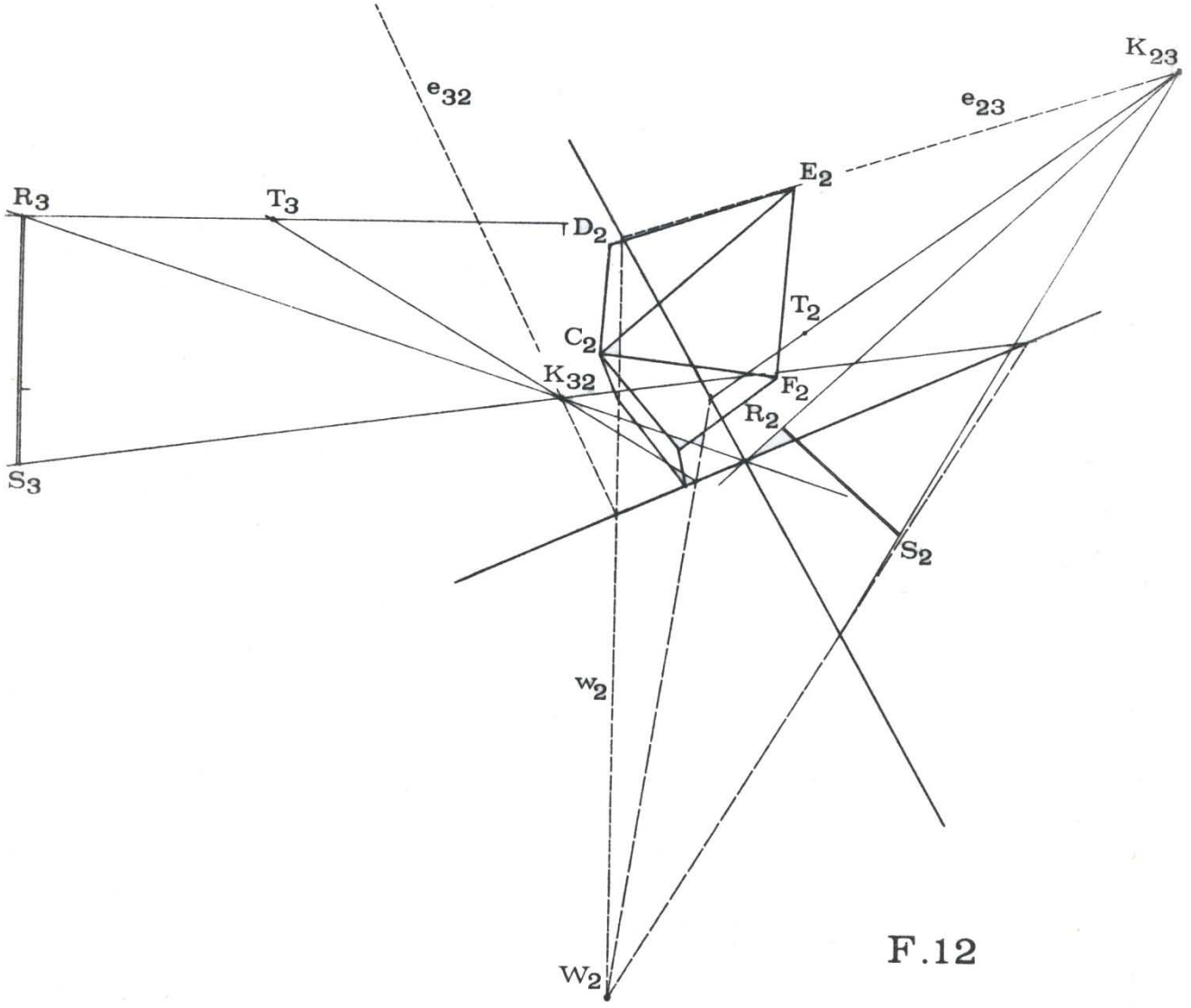
Tale intreccio di proiettività permette così di disporre liberamente immagini fotografiche e immagine restituita secondo le necessità dell'operatore.

Per concludere è bene osservare che, quando uno o entrambi i fotogrammi sono paralleli alla giacitura di restituzione, il procedimento subisce notevoli semplificazioni (Nota 1).

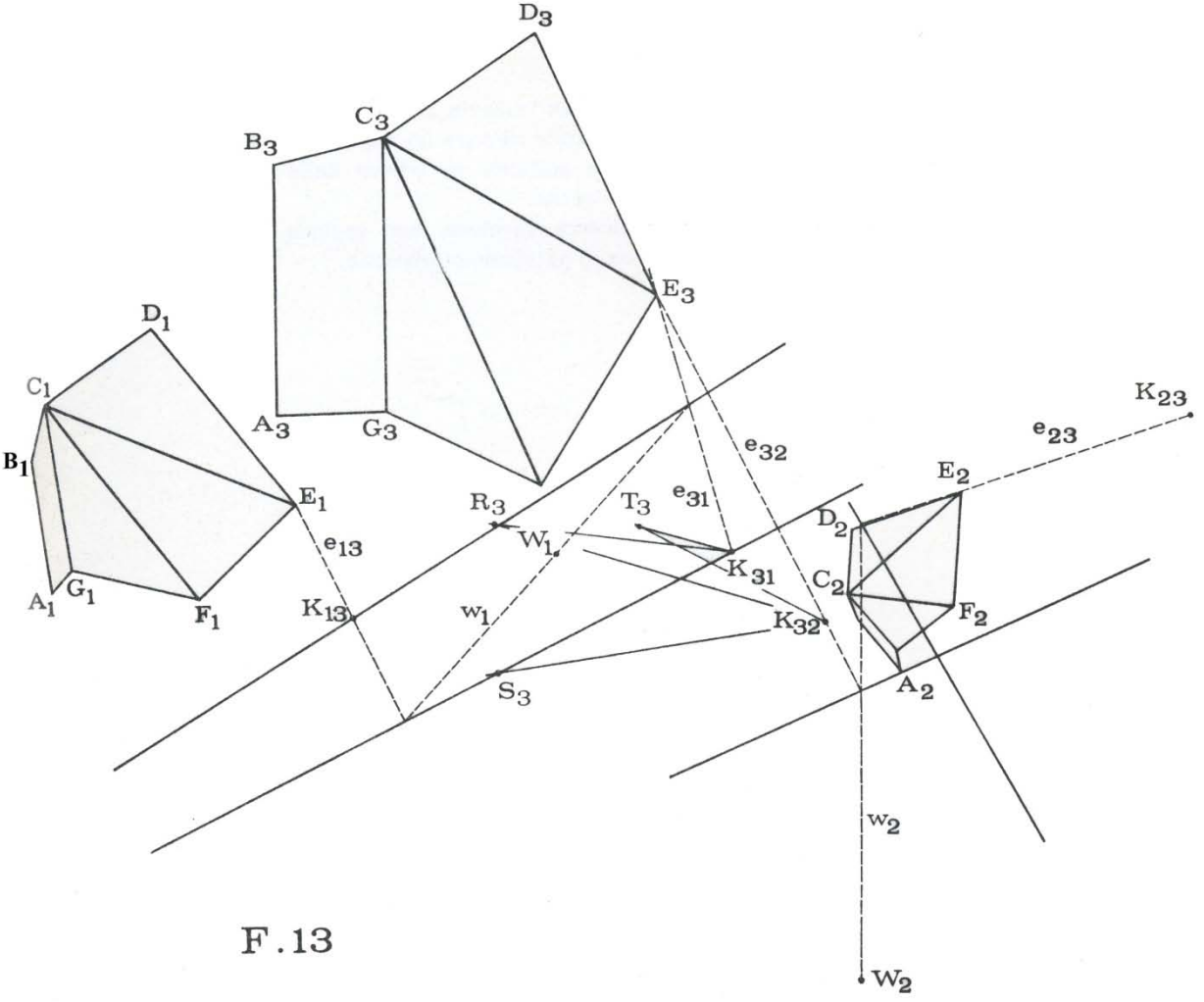
In quest'ultimo caso il metodo risulta paragonabile al precedente da me elaborato, sulla restituzione due fotogram



F.11



F.12



D3
C3
B3
E3
D1
C1
A3
G3
K23
e23
e32
B1
E1
R3
T3
e31
E2
D2
e13
W1
K31
C2
A1
G1
F1
K13
w1
K32
F2
S3
A2
w2
W2

F.13

mi paralleli (in bibliografia): tuttavia in quel metodo, a differenza di questo, era possibile rilevare un manufatto a distanza, prelevando sul luogo soltanto la misura della distanza fra le due postazioni di ripresa.

Ogni metodo, che la ricerca fornisce, non esclude gli altri, ma integra e arrichisce il patrimonio esistente.

NOTE

Nota 1

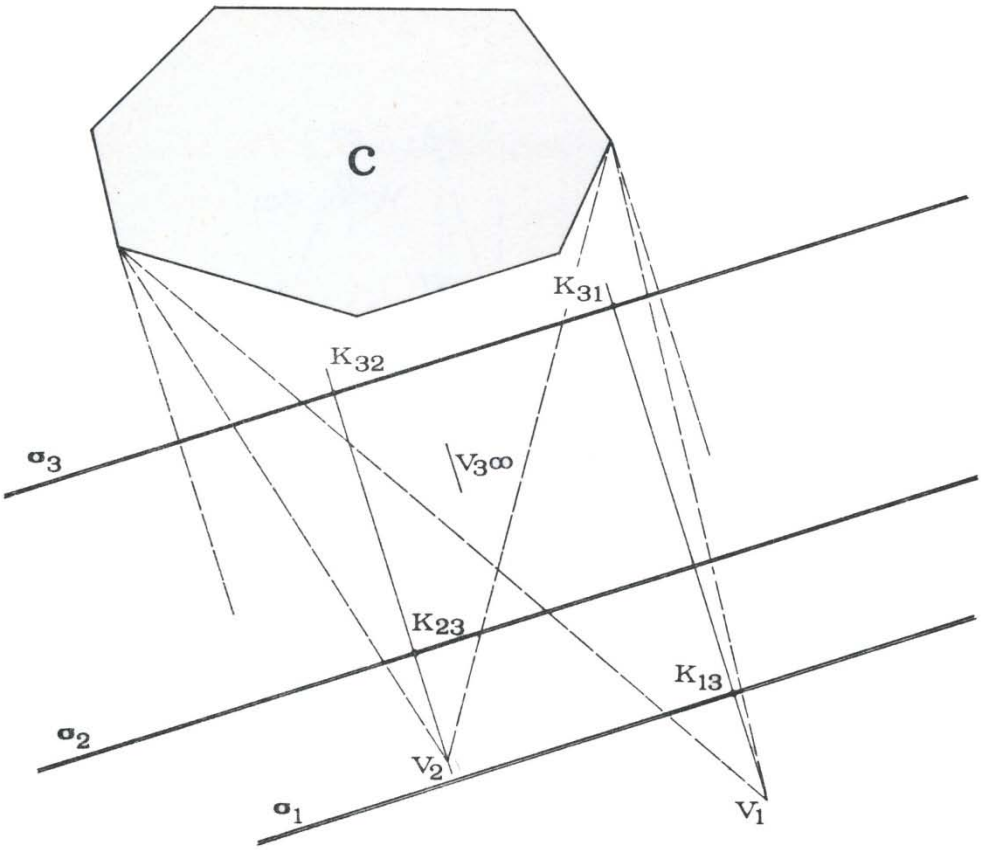
Supponiamo che i piani σ_1 e σ_2 dei fotogrammi abbiamo la giacitura del piano σ_3 su cui si desidera ottenere l'immagine restituita (Fig. 14).

In tal caso le rette V_1 - V_3oo e V_2-V_3oo risultano ortogonali ai tre piani, facendo sì che in ciascun fotogramma i due nuclei vadano a coincidere con V_o , punto di fuga delle ortogonali al quadro (Figure 15 e 16).

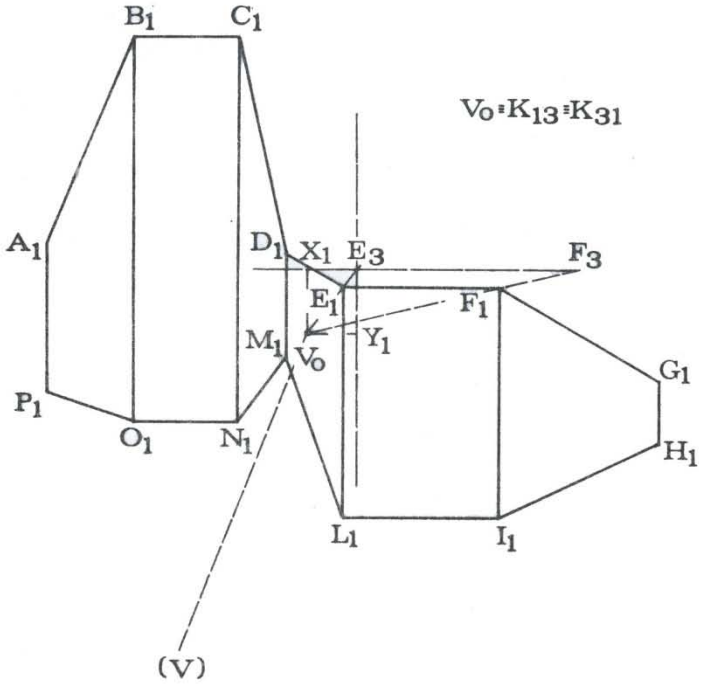
Nota allora la dimensione del segmento EF del manufatto, fissata la scala metrica, è immediato proiettare i tre punti E F L, individuanti la giacitura assegnata, sul quadro di restituzione, ottenendo, in entrambi i fotogrammi, i punti E_3, F_3, L_3, corrispondenti rispettivamente alle immagini E_1, F_1, L_1 nel primo ed E_2, F_2, L_2 nel secondo.

Essendo in ciascun fotogramma i due fasci proiettivi inizialmente coincidenti, la traslazione di un fascio rispetto all'altro mantiene le rette corrispondenti parallele: tale circostanza permette allora di tracciare i centri di collineazione W_1 e W_2 come punti medi dei segmenti congiungenti ciascuna coppia di nuclei (Figure 17 e 18).

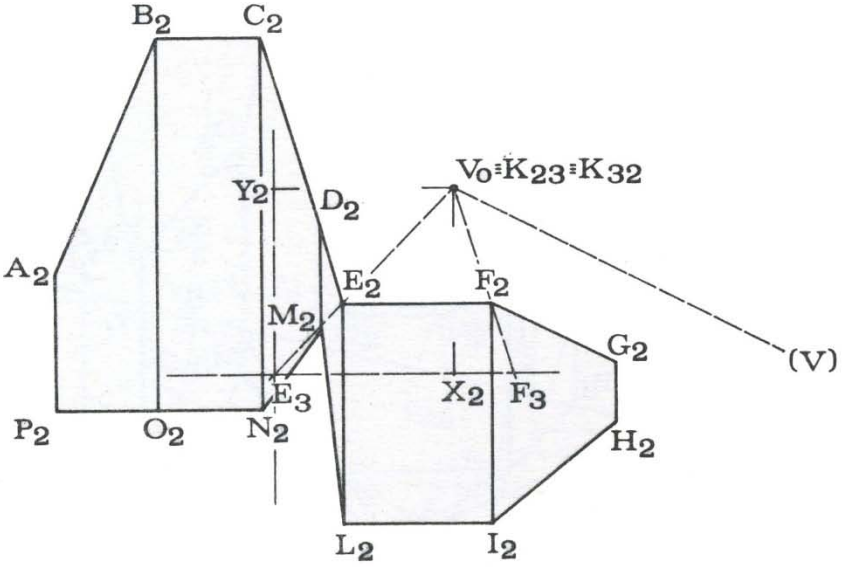
Sovrapponendo nelle due proiettività le terne E_3 F_3 L_3 , il generico punto I_3 dell'immagine restituita è ottenuto, come è noto, per intersezione delle rette i_{31} ed i_{32}, corrispondenti rispettivamente alle rette i_{13} per I_1 ed i_{23} per I_2 (Fig. 19).



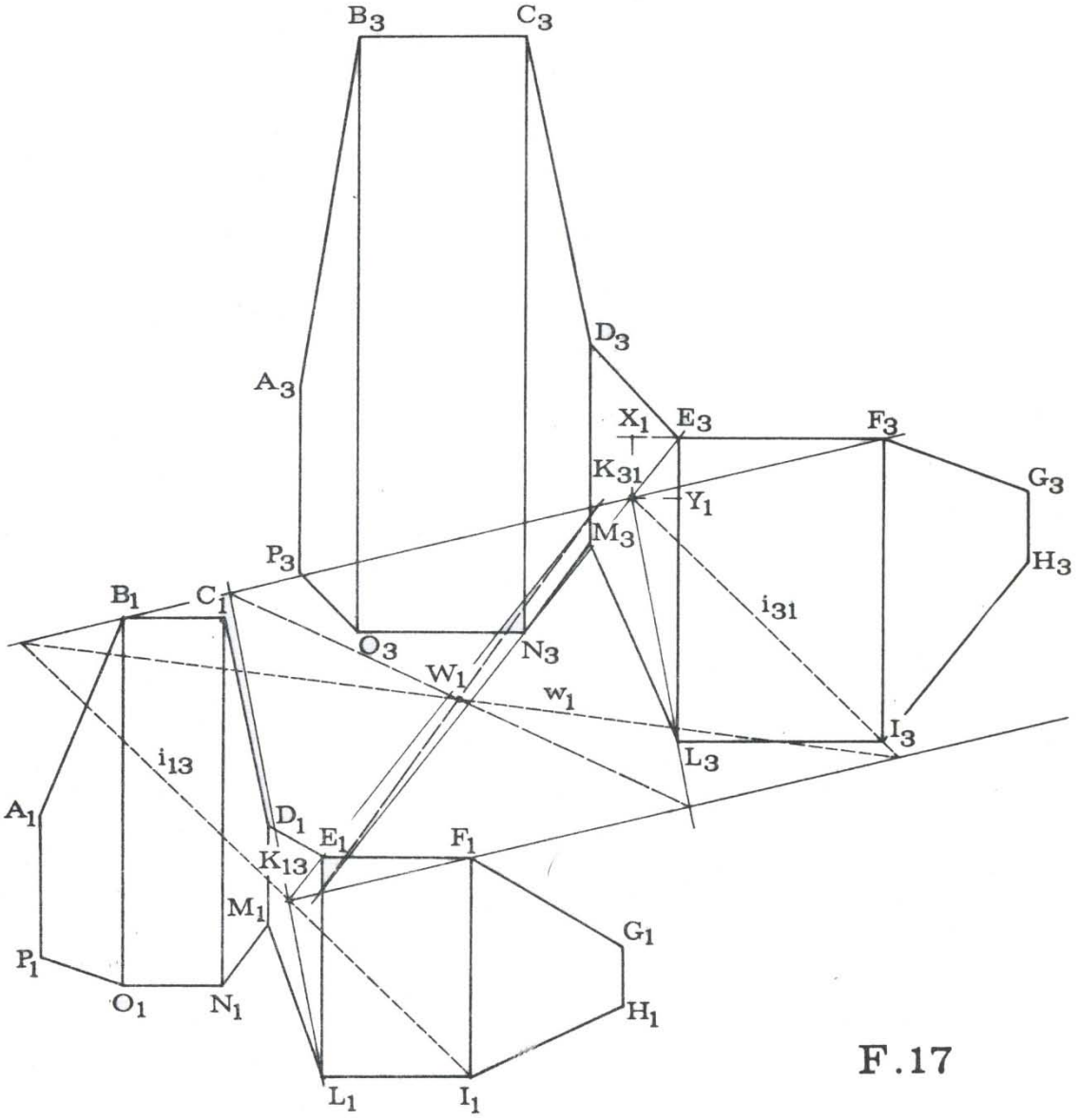
F.14



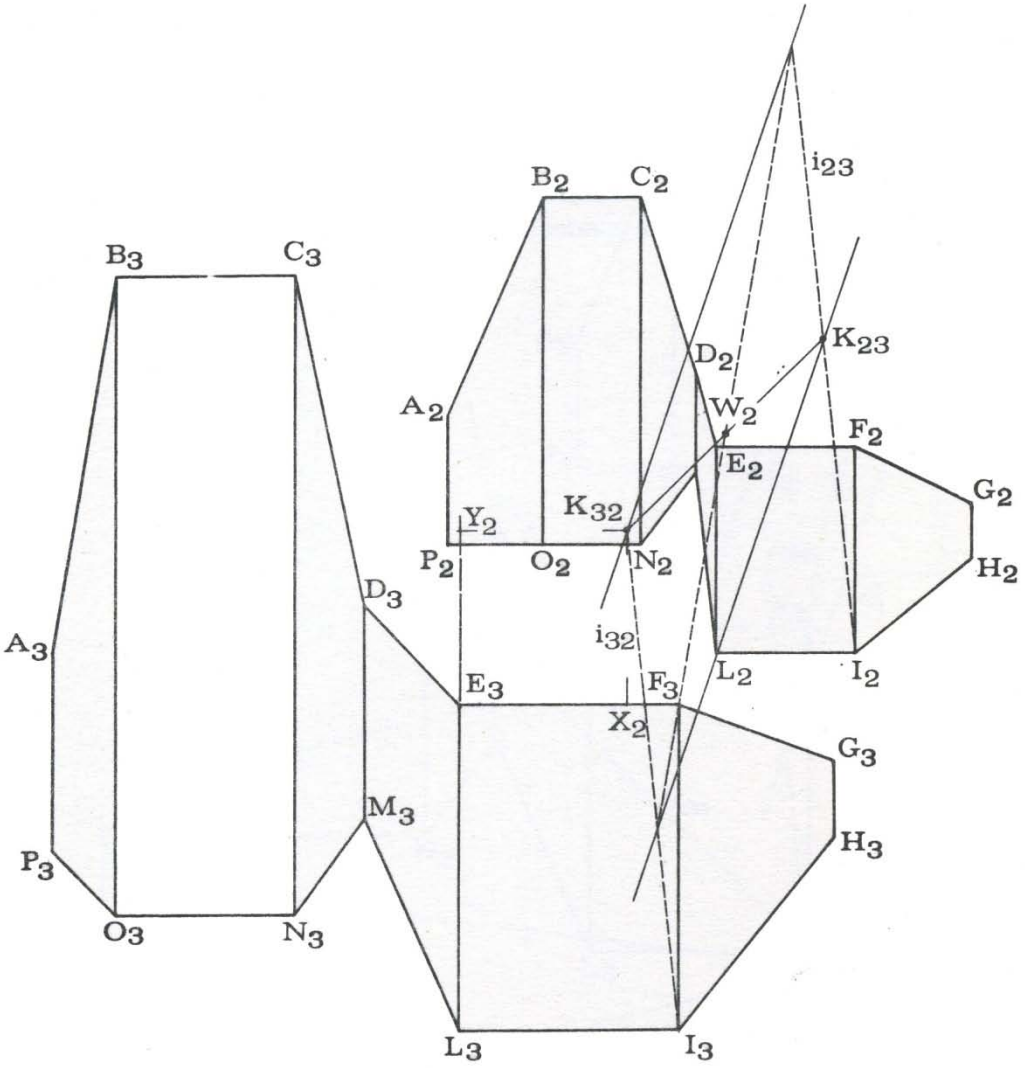
F.15



F . 16

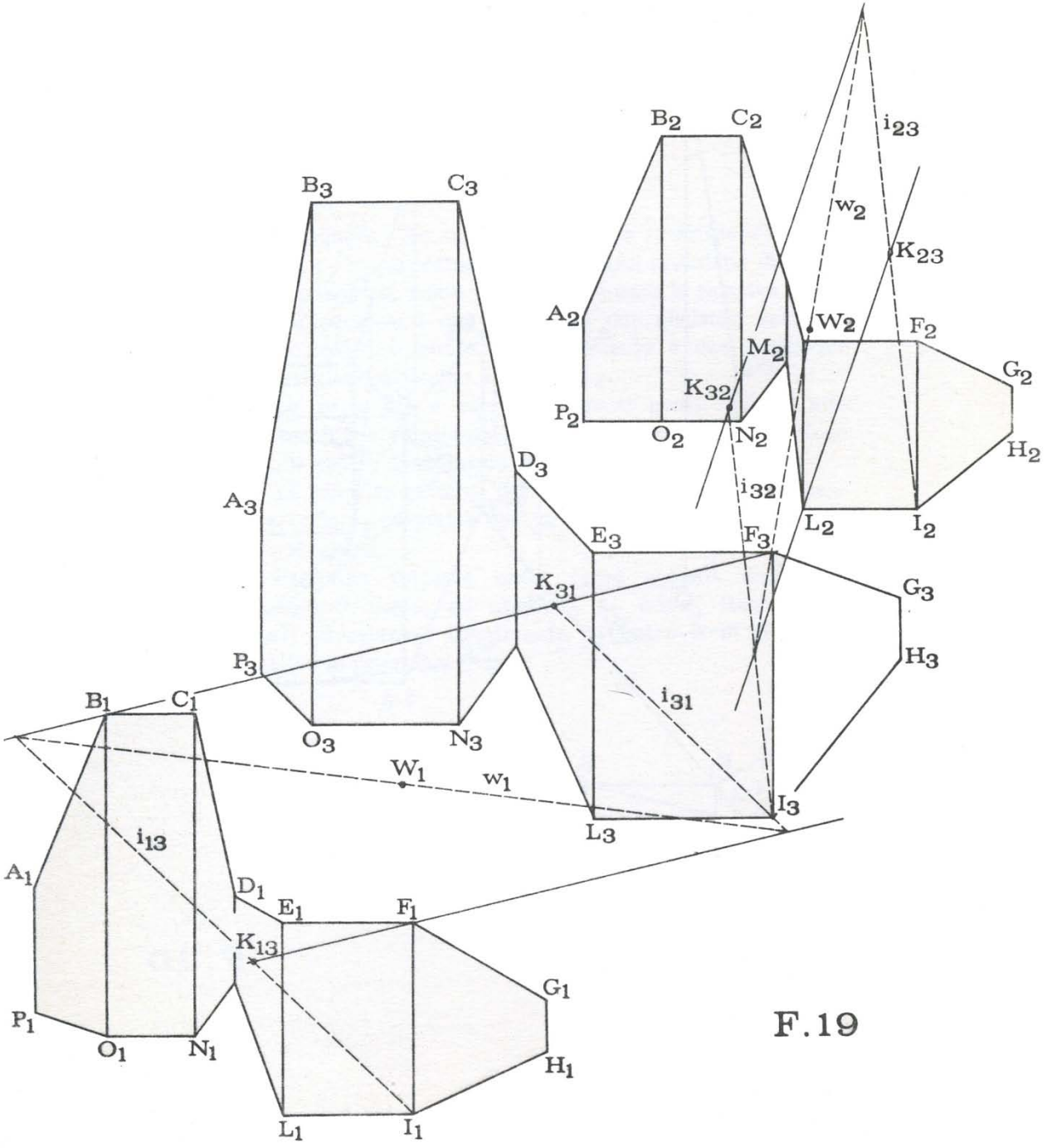

B3
C3
D3
A3
X1
E3
F3
K31
G3
Y1
M3
P3
H3
B1
C1
i31
O3
N3
W1
w1
I3
L3
i13
A1
D1
E1
F1
K13
M1
G1
P1
O1
N1
H1
L1
I1

F.17

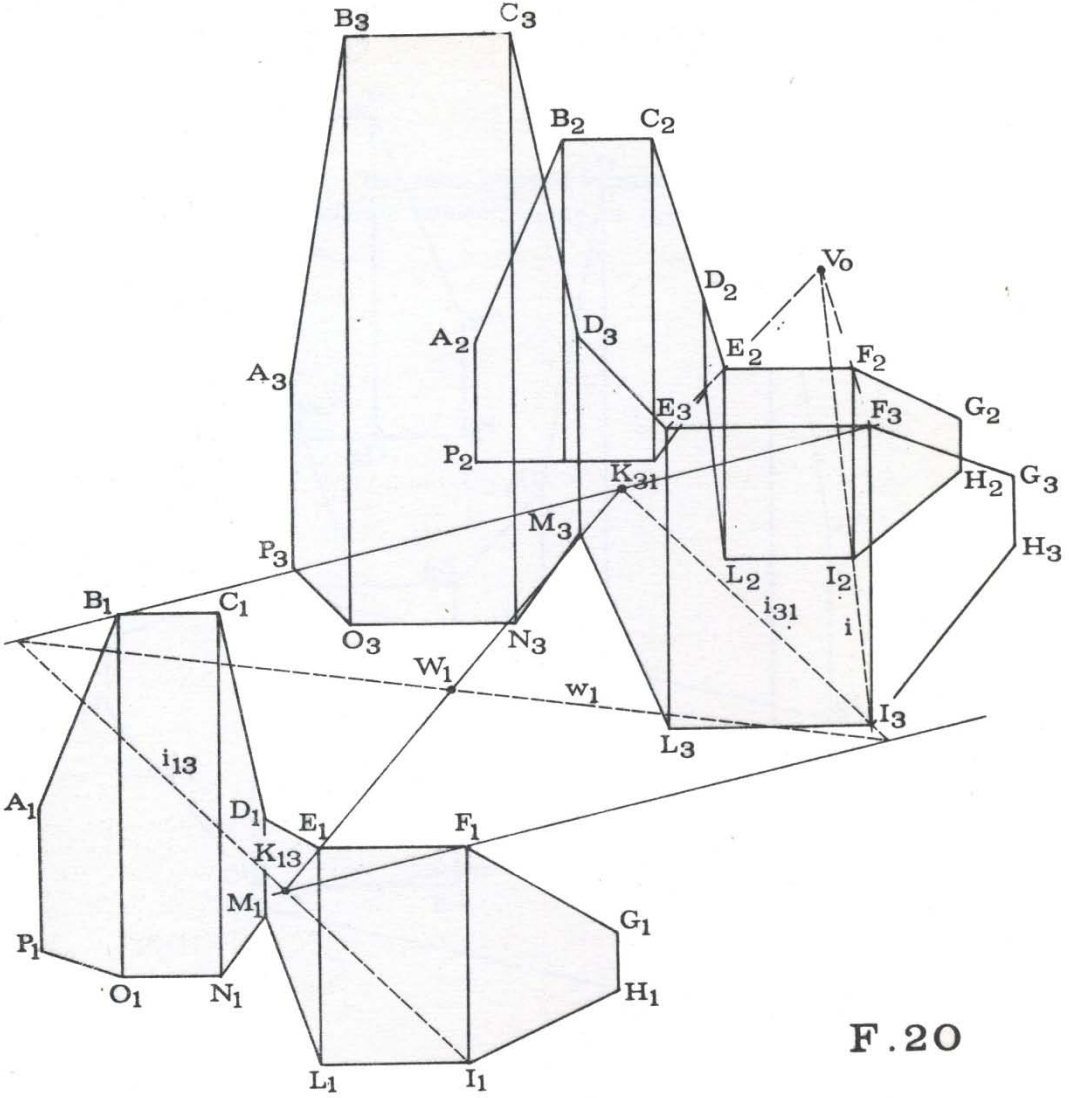

B3
C3
A3
P3
O3
N3
D3
M3
E3
F3
L3
I3
G3
H3
X2
B2
C2
A2
Y2
P2
O2
N2
K32
i32
D2
W2
E2
L2
F2
G2
H2
I2
i23
K23

F.18

Se, infine, i due fasci possono mantenersi coincidenti, la costruzione subisce evidentemente un apprezzabile snellimento (Fig. 20).


B2
C2
i23
w2
K23
B3
C3
A2
W2
F2
M2
G2
K32
P2
O2
N2
H2
D3
i32
A3
L2
I2
E3
F3
K31
G3
H3
P3
i31
B1
C1
O3
N3
W1
w1
I3
L3
i13
A1
D1
E1
F1
K13
G1
P1
O1
N1
H1
L1
I1

F.19


B3
C3
B2
C2
Vo
D2
A2
D3
E2
F2
A3
E3
F3
G2
P2
K31
H2
G3
M3
H3
P3
L2
I2
i31
i
B1
C1
O3
N3
W1
w1
I3
L3
i13
A1
D1
E1
F1
K13
M1
G1
P1
O1
N1
H1
L1
I1

F.20

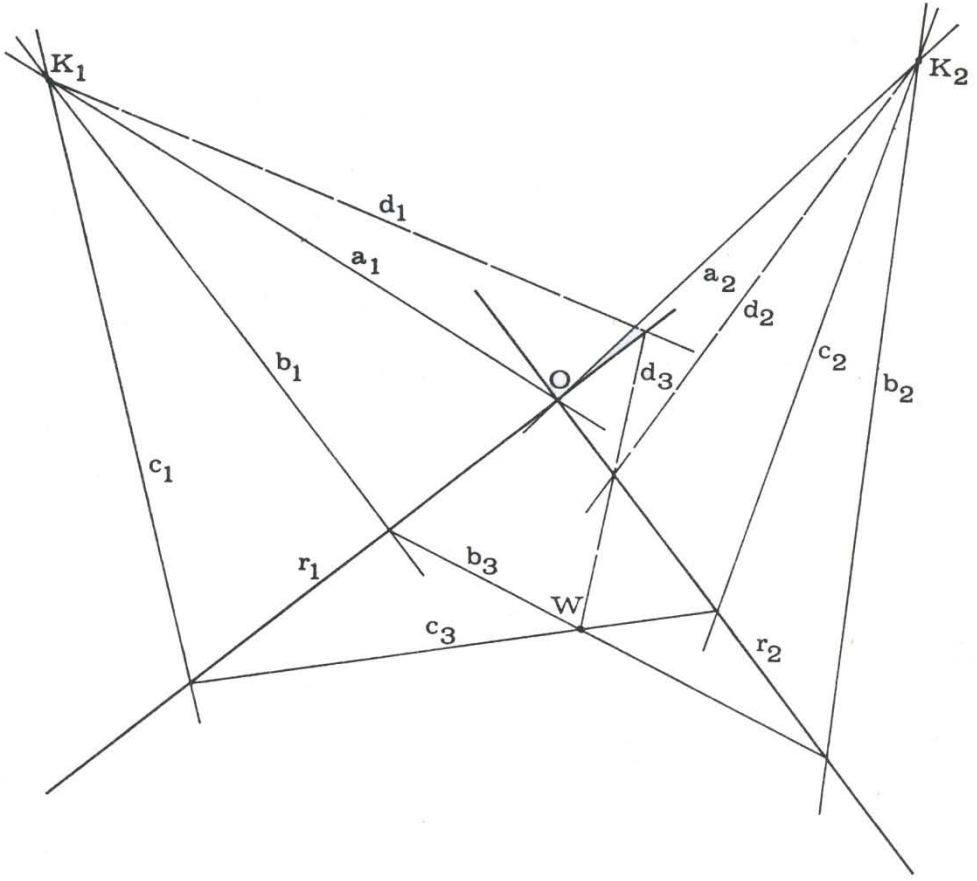
Nota 2

Assegnate tre coppie di rette corrispondenti a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2, appartenenti a due fasci proiettivi di centri K_1 e K_2 possiamo, come è noto, instaurare la relativa corrispondenza secando i due fasci con due qualsiasi rette r_1 e r_2 contenenti il punto O appartenente a due qualunque rette corrispondenti come a_1 e a_2 (Fig. 21)

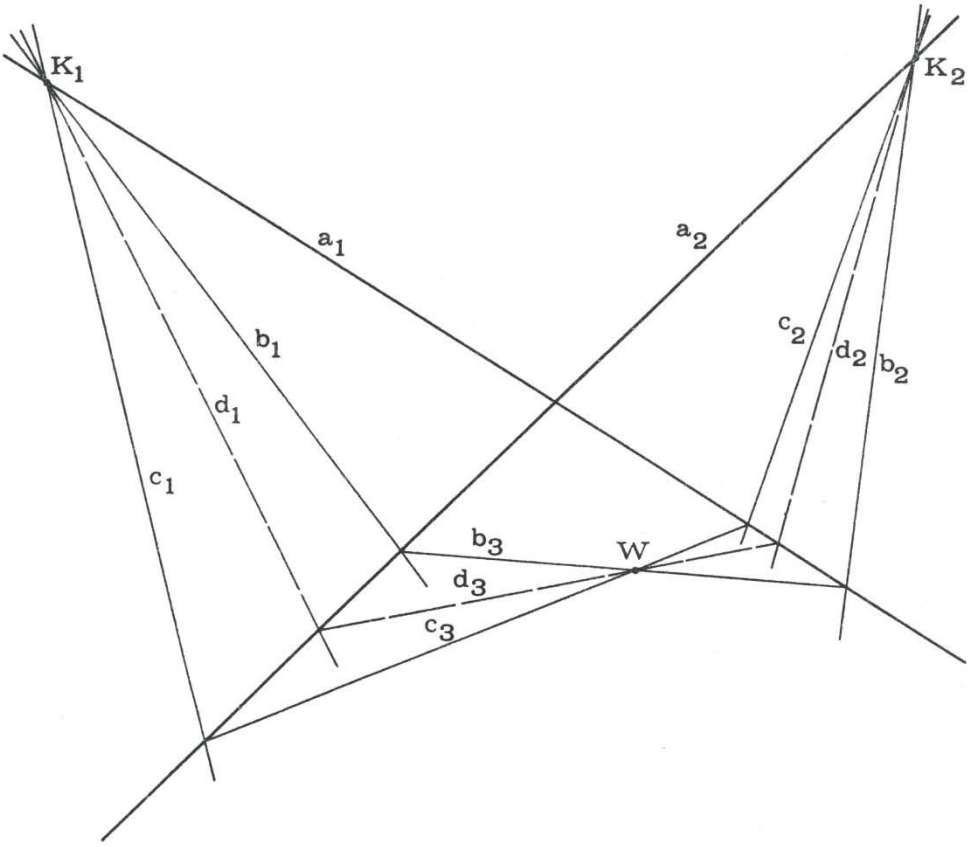
Le rette b_3 e c_3 , congiungenti punti camuni alle coppie omologhe ed alle secanti, forniscono per intersezione il punto W centro di un fascio prospettivo con i primi due.

La generica retta d_3 del fascio di centro W , intersecando la r_1 e la r_2 , permette così di tracciare la retta d_2 , nota la d_1 , e viceversa.

Possiamo tuttavia usare come secanti due rette corrispondenti come, ad esempio, a_1 ed a_2 (teorema di Aschieri) ed ottenere ugualmente il centro W di un fascio prospettivo ai primi due (Fig. 22).



F.21



F.22

APPLICAZIONE

Chiesa di S.Giorgio dei Genovesi a Palermo

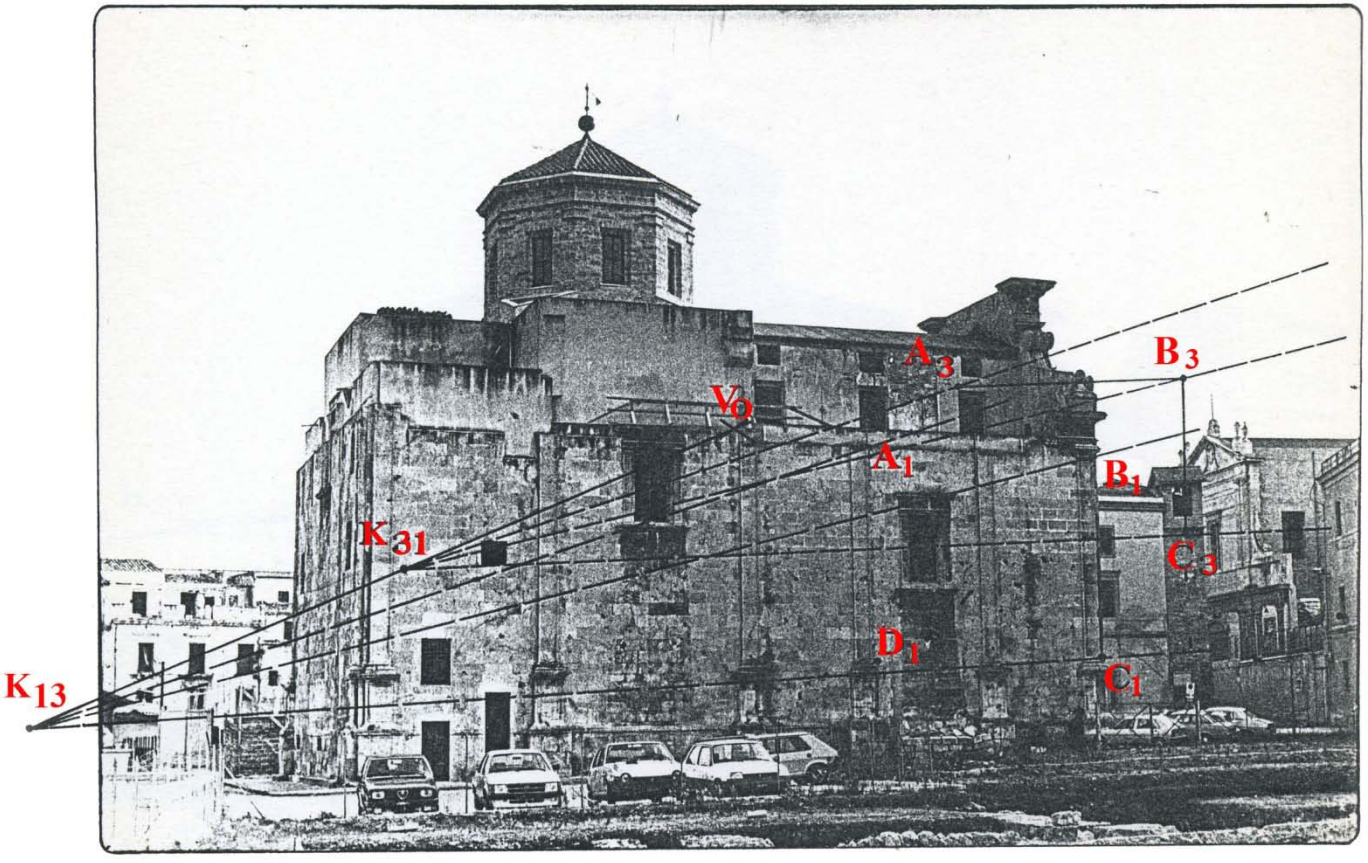
Chiesa di S. Giorgio dei Genovesi a Palermo

Una sperimentazione del metodo è stata eseguita a Palermo sulla chiesa di S. Giorgio dei Genovesi (1576), ricavandone la proiezione ortogonale sulla giacitura della facciata ovest (Tav. 3), mediante due fotogrammi comunque orientati (Tavole 1 e 2).

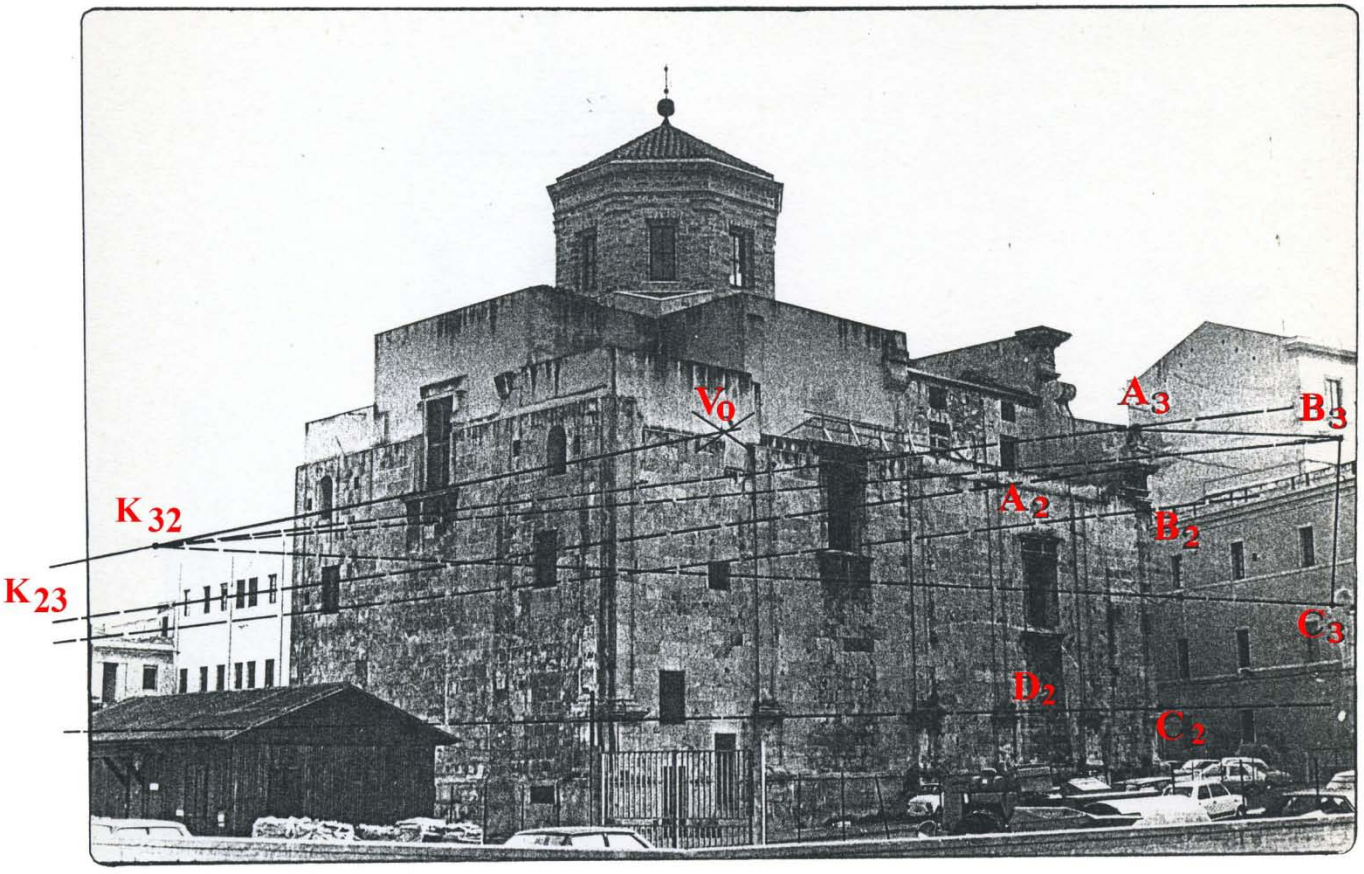
La conformazione della chiesa ha suggerito di adottare come punti di appoggio, individuanti la giacitura di restituzione, i punti A B C D estremi di due lesene della facciata (Tavole 1 e 2), prelevando quindi sul luogo soltanto la misura della distanza fra gli estremi C e D.

E' mostrata quindi nelle tavole la collocazione dei nuclei K e delle tre coppie di punti corrispondenti A B C individuanti su ciascun fotogramma i due fasci proiettivi.

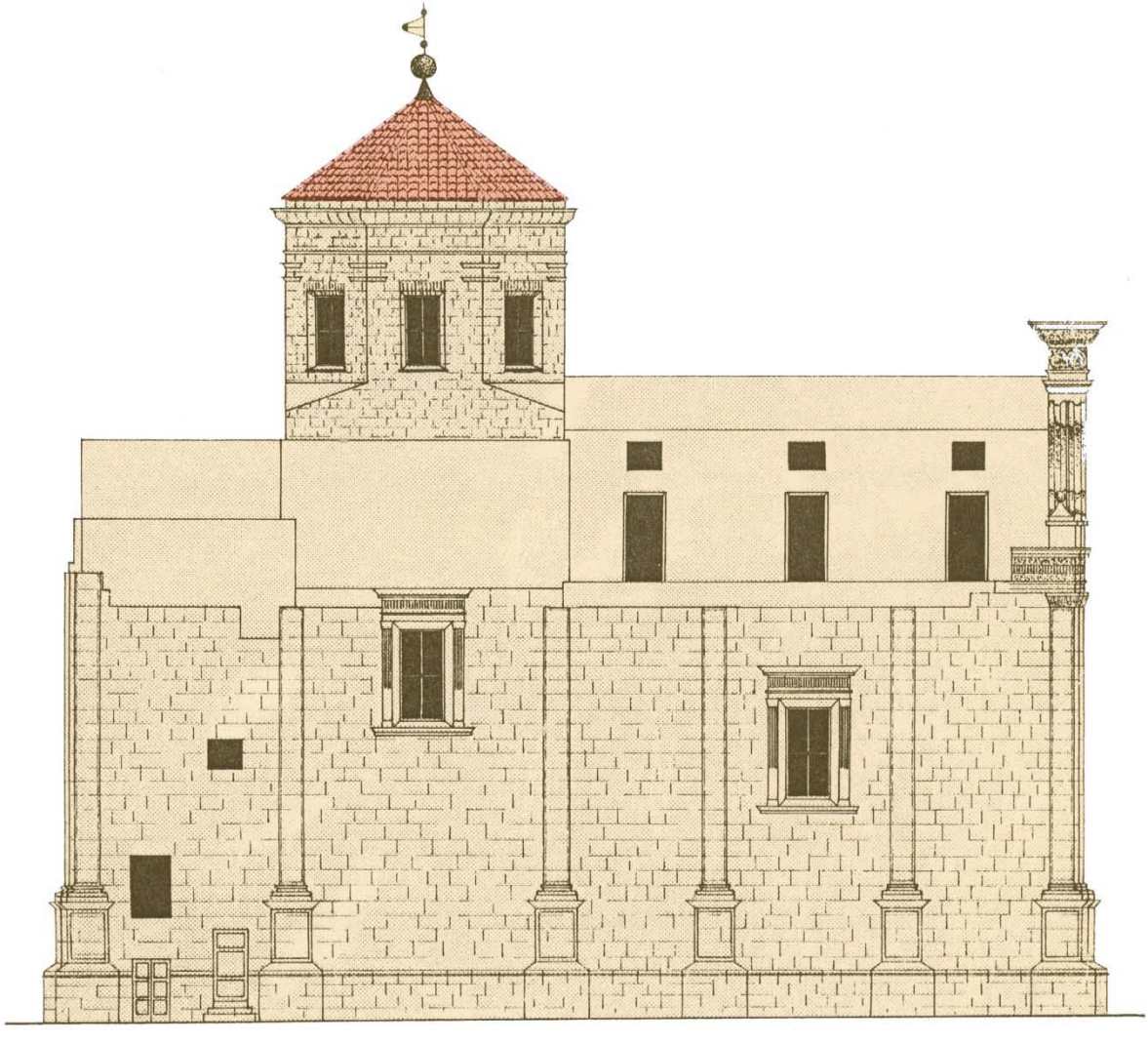
Occorre sottolineare la necessità di una notevole precisione in tutte le operazioni grafiche di restituzione e quindi l'opportunità di utilizzare macchine fotografiche a pellicola rigida, in modo da fornire in partenza immagini prospettiche perfette.



T. 2 Fotogramma 1



T. 2 Fotogramma 2



T. 3

0 1 2 3m

BIBLIOGRAFIA

G.M. CATALANO, Rilevamento a distanza di qualsiasi volume per restituzione da due fotogrammi, Co.Gra.S., Palermo, 1988.

V. CAPITANO, Applicazioni di Geometria Proiettiva e Descrittiva al disegno delle forme geometriche elementari, I.L.A. Palma, Palermo, Sao Paulo, 1972.

C. CUNDARI, Fotogrammetria architettonica, Ed. Kappa, Rome, 1983.

G. DE FIORE, M. DOCCI, C. JANNICCARI, A. PASCUCCI, Teoria della rappresentazione architettonica, Facoltà di Architettura, Roma, 1964.

M. DOCCI, D. MAESTRI, Il rilevamento architettonico, Editori Laterza, Bari, 1987.

R. FILOSTO, Lineamenti teorici del disegno, I.L.A. Palma, Palermo, Sao Paulo, 1968.

M. INZERILLO, Lezioni di Applicazioni di Geometria Descrittiva, Co.Gra.S., Palermo, 1977.

R. MIGLIARI, I1 ruolo di Guido Hauck nello sviluppo teorico della fotogrammetria d'architettura, Quaderno NN.1-2 del Dipartimento di Rappresentazione e Rilievo, Università di Roma "La Sapienza", 1988.

U. SACCARDI, Applicazioni di Geometria Descrittiva, Libreria Editrice Fiorentina, Firenze, 1977.

A. SGROSSO, A. VENTRE, Elementi di geometria proiettiva e di geometria descrittiva, Massimo, Napoli, 1979.

INDICE

5 PRESENTAZIONE

7 INTRODUZIONE

METODO

11 Principi teorici
17 Principi applicativi
35 Note

APPLICAZIONE

51 Chiesa di S. Giorgio dei Genovesi a Palermo

59 BIBLIOGRAFIA